EL VOLUMEN. OBSERVACIÓN DE PROCESOS DE APRENDIZAJE DE CONTENIDOS DE LA ENSEÑANZA SECUNDARIA

Volume. Contents learning-process observation of secondary education

Sonia Sanchis [(a)] y Gregoria Guillén[(b)]

Universitat de València[(a)], Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universitat de València[(b)]

Resumen

Este estudio se refiere a la observación de procesos de aprendizaje de contenidos relativos al volumen de algunos sólidos, magnitud de gran importancia en la educación matemática desde Primaria a la Universidad. Diseñamos una secuencia de actividades que implican diferentes aspectos de la medición y diferentes procedimientos de resolución y la desarrollamos con estudiantes de segundo de la ESO. Analizamos las respuestas de los estudiantes a estas actividades y determinamos tipos de respuestas, errores y dificultades relativos a contenidos geométricos y de medición y en relación con la resolución de problemas, concluyendo algunas sugerencias para la instrucción.

Palabras clave*: volumen, capacidad, área de una superficie, resolución de problemas.*

Abstract

This study is concerned with the observation about learning process of related to the volume from some geometric fields, magnitude of great importance in mathematics education from elementary to College. We design a sequence of activities that involve different aspects of measurement and different procedures of resolution and develop it with second ESO students. We analyzed the responses of students to these activities and determine types of replies, errors and difficulties related to geometric content and measurement and in relation to the problems solving, concluding suggestions for instruction.

Keywords*: volume, capacity, a surface area, problems solving.*

Sanchís, S. y Guillén, G. (2013). El volumen. Observación de procesos de aprendizaje de contenidos de la enseñanza secundaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 511-522). Bilbao: SEIEM.

PRESENTACIÓN

Diferentes estudios realizados en Didáctica de las matemáticas han llamado la atención sobre cómo se realiza la enseñanza de la superficie y el volumen de los sólidos (Sáiz, 2002). La diversidad de sugerencias que se han dado para la enseñanza/aprendizaje de esta materia no se ven muy reflejadas en las clases de la Enseñanza Obligatoria (ESO) (Del Olmo, Moreno & Gil., 1989). Los profesores se sienten más seguros al enseñar el volumen, cuando lo hacen a través de tratamientos cuantitativos, siendo la fórmula el procedimiento más frecuente (Sáiz, 2002). En el caso del volumen, el considerarlo como medida es el aspecto predominante, quedando en segundo plano las actividades encaminadas a la adquisición del concepto de volumen. De las diferentes posibilidades que tenemos para medir el volumen, la que nunca falta en los libros de texto de secundaria es el uso de las fórmulas, justificación de las cuales se obvia (González, López & Flores, 2001). Asimismo, estudios previos realizados con profesores de la ESO de la Comunidad Valenciana (Pérez y Guillén, 2008) o tomando como objeto de análisis libros de texto para la ESO de diferentes editoriales (García y Guillén, 2010) han llevado a concluir que las tareas que más se proponen en las clases para trabajar los sólidos son de medición y se refieren a la utilización de la unidad de medida y fórmulas para calcular áreas y volúmenes. Se presta poca atención a la enseñanza de relaciones entre diferentes sólidos y/o sus representaciones a pesar de que éstas pueden surgir de nuevo en la enseñanza/aprendizaje de la superficie y el volumen de éstos.

El trabajo realizado pretende obtener información sobre los objetos mentales[xli] que los estudiantes de la ESO construyen de conceptos relacionados con el volumen de los sólidos al desarrollar la instrucción diseñada teniendo en cuenta resultados de la investigación en didáctica de las matemáticas. Centramos la atención en las ideas que se tienen de los conceptos implicados y en el establecimiento de relaciones, que entraña la comparación entre: i) el volumen y capacidad y sus unidades de medida, ii) volúmenes de prismas rectos y oblicuos, ii) la superficie[xlii] y el volumen, iii) el volumen y capacidad, iv) volúmenes de diferentes sólidos. Además, contemplamos el recubrimiento con unidades, transformaciones que mantienen el volumen de los sólidos implicados y el uso de métodos de composición y descomposición. Se pretende también obtener información sobre el uso que se hace de los contenidos tratados en la instrucción en la resolución de problemas de aplicación.

La información obtenida la hemos organizado distinguiendo tipos de respuestas para las actividades y dificultades y errores[xliii], referidos a contenidos geométricos, aspectos de la medición y a la resolución de problemas, y desde ella concluimos algunas sugerencias para la instrucción.

MARCO TEÓRICO. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

Este trabajo forma parte del estudio del Proyecto fin de Máster de Profesor/a de Secundaria, especialidad de matemáticas, (Sanchis, 2012). Desarrollado en el departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València, se sitúa en la línea de investigación que se centra en la enseñanza/aprendizaje de los procesos matemáticos a partir de la geometría de los sólidos y contempla otras dos líneas de investigación que se refieren a la medición y a la resolución de problemas.

El marco de referencia de la geometría de los sólidos ya lo hemos descrito en trabajos previos (Guillén, 2010). Subrayamos la importancia que se da a los contextos con un doble papel; en primer lugar se utilizan para producir significados de los contenidos tratados y en segundo lugar se utilizan como campo de aplicaciones (Treffers, 1987).

Relativo a la medición, cabe destacar las investigaciones que han realizado un análisis del concepto de volumen (Sáiz, 2002), un análisis fenomenológico de su enseñanza (Freudenthal, 1983), han determinado dificultades y errores y han dado sugerencias para la instrucción (Del Olmo et al. , 1993) o se contemplan en el análisis de los datos (San Miguel & Salinas, 2011).

La resolución de problemas de medición la examinamos como describimos en Guillén y Siñériz (2012), usando las fases cuyo perfil se contempla en Polya (1965) y distinguiendo además aspectos cognitivos reformulados desde Schoenfeld (1985). También hemos considerado la distinción que hace Puig (1996) entre tres aspectos en el proceso de resolución de problemas. Siguiendo a este autor, usamos *resultado* para indicar lo que se contesta a la pregunta del problema, *solución* para indicar la presentación final del conjunto de pasos que conducen de los datos a la incógnita y *resolución* para indicar el conjunto de las acciones del resolutor durante el proceso, que pueden conducir a obtener la solución o no (p. 34). Y hemos considerado la adaptación que se hace en Murillo y otros (2011) para la resolución de problemas geométricos. Los problemas que hemos considerado en el estudio contienen cantidades intensivas y extensivas. Las cantidades extensivas son aditivas, en el sentido de que los números pueden sumarse, manteniendo inalterada la unidad que los acompaña. Las cantidades intensivas son razones, tienen unidades compuestas, formadas por el cociente de dos cantidades extensivas (Puig y Cerdán, 1988, pp. 125-129). Los problemas corresponden a los que Butts (1980) denomina *Problemas de aplicación* y *Problemas de investigación abierta*. En los primeros, la resolución implica formular los problemas simbólicamente y después manipular esos símbolos de acuerdo a varios algoritmos. Los segundos son problemas que no contienen la estrategia de resolución en el enunciado.

METODOLOGÍA. CONTEXTO PARA LA EXPERIMENTACIÓN

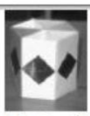
La experimentación se desarrolló en el IES Pou Clar de Ontinyent (València) con un grupo de 17 alumnos de 2º de ESO en 15 sesiones de 55 minutos cada una, centrando el estudio en el volumen de los sólidos que se trabajan en la ESO (prismas, pirámides y sólidos de revolución). Para el trabajo que presentamos en este informe se contempla el volumen de los prismas, pirámides, troncos de pirámide y cilindros.

Actividades	Actividad matemática y contexto en el que se desarrolla.
1ª Sesión: Video de los Simpson	Identificando sólidos y sus elementos
2ª Sesión: Sobre las unidades de medida.	Resolución de problemas y unidades de medida no estándar. Resolución del problemas: Cambios de unidades de capacidad y de unidades de volumen. Cambios de unidades de volumen a otras de capacidad y viceversa.
3ª Sesión: El volumen y la superficie de los paralelepípedos.	Un problema de empaquetar: Elaboración de la fórmula del volumen del ortoedro por cubrimiento con cubitos. Elaboración de la fórmula del volumen de los paralelepípedos (no ortoedros) mediante la descomposición y composición. Los desarrollos de los ortoedros y su superficie en un contexto de construcción. La superficie de los paralelepípedos en un contexto de resolución de problemas.
4ª Sesión: El volumen y la superficie de los prismas.	Generalización de la fórmula del volumen de un prisma triangular recto a partir del volumen de los paralelepípedos y al relacionar los prismas y los polígonos de sus bases. Justificación de la fórmula de un prisma regular mediante la descomposición y la composición. La superficie de los prismas rectos en un contexto de construcción y de resolución de problemas.
5ª Sesión: El volumen, la capacidad y la superficie del cilindro.	Resolución de problemas: Cálculo del área, volumen y capacidad de diferentes envases, donde algunos precisan de la descomposición y composición.
6ª Sesión: Volumen de la piràmide.	Contexto de puzzles: Justificación de la fórmula del volumen de la pirámide cuadrangular a partir de la descomposición del cubo en 3 y seis pirámides. Generalización del volumen de la pirámide mediante objetos manipulativos.

Cuadro 1: Organización de las sesiones de la instrucción y descripción de las actividades que se trataron en ellas.

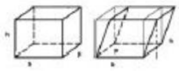
La secuencia de actividades, diseñada teniendo en cuenta resultados obtenidos en la investigación, constaba de dos tipos de tareas; unas para realizar la instrucción en la primera parte de la experimentación y otras para la toma de datos, en la segunda parte de la misma. En la primera parte se trabajó en un contexto de clase, interactuando el profesor y el alumno vía pregunta- respuesta; se pretendía producir significados de los contenidos implicados en las actividades tratadas; se trabajó desde contextos, usando material manipulativo, realizando las acciones implicadas en los procedimientos geométricos que se abordaban y se usó la resolución de problemas y la elaboración de fórmulas como contenido objeto de enseñanza y también como contexto para seguir ampliando las ideas que se tenían sobre los contenidos implicados así como para producir significados de otros conceptos que se compararon con los de volumen de los sólidos, entre ellos los asociados a la superficie de éstos y a la capacidad. En el Cuadro 1 describimos brevemente la organización de las 6 sesiones de esta primera parte relacionadas con los datos que presentamos aquí.

En la segunda parte de la experimentación los estudiantes trabajaron en grupos. Se resolvieron un total de 18 actividades. El Cuadro 2 muestra las 10 actividades desde cuyas respuestas hemos extraído los datos que presentamos en este informe. El diseño de las mismas se explica desde lo que se pretende en el estudio señalado en la presentación.



A1.- a) El volumen del cubo pequeño es $6cm^3$ ¿cuál crees que es el volumen del paralelepípedo? b) El volumen del prisma triangular es $7m^3$. ¿Cuál es volumen del prisma hexagonal?

A 2.- a) Sabemos que el volumen del paralelepípedo recto, ¿cuál crees que es el volumen del paralelepípedo oblicuo? ¿Por qué? b) ¿Crees que pasa lo mismo con el área?

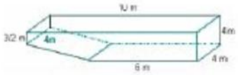


A3.- Sabiendo que el volumen de cualquier prisma pentagonal recto, ¿cuál crees que es el volumen de un prisma pentagonal oblicuo con misma base y altura? ¿Por qué?

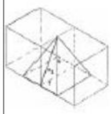
A4.- Calcula el volumen comprendido entre un cubo de 6cm de arista y el cilindro inscrito en él.

A5.- El cilindro de un automóvil es dónde se realizan las explosiones de combustible, para dar fuerza al vehículo para que se mueva. Una cilindrada es el volumen útil del cilindro, que normalmente está expresada en cc (centímetros cúbicos). Recuerda que en las carreras de MGP, siempre se expresa por carrera de motos de 125cc, 250cc, 500cc. Es a decir nos dicen constantemente el volumen del cilindro. Una moto de 125cc, tiene un cilindro de 56mm de diámetro, ¿cuánto vale su altura? ¿Cuántos litros de combustible caben al interior del cilindro?

A6.- Una piscina tiene la forma que se muestra a la figura. a) ¿Cuántos litros se necesitan para llenarla por completo? c) Llega el verano y se quiere llenar. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarla una manguera que aboca a la piscina 100 litros por minuto?



A7.- Las pirámides de Egipto fueron construidas como sepulcros de los faraones hace miles de años. Son regulares (pirámides rectas de bases polígonos regulares) y cuadrangulares. La mayor de ellas es la pirámide de Keops, tiene 160m de altura y el lado de la base es 240m. a) ¿Qué superficie ocupa la pirámide? b) Calcula su área y su volumen.



A8.- El volumen del prisma cuadrangular constituido por los dos cubos es 128 cm^3. ¿Cuánto mide el volumen de la pirámide? Justifica tu respuesta.

A9.- Tienes dos pirámides con la misma base cuadrangular, pero una pirámide tiene el doble de altura que la otra. ¿Qué relación hay entre los volúmenes? ¿Por qué?

A10.- El recipiente siguiente tiene 12cm de altura, sus bases son hexágonos regulares de lados 3cm y 6cm, y apotemas 2´6 cm y 5´2 cm respectivamente. ¿Tiene más de un litro de capacidad?

Cuadro 2: Actividades para la toma de datos.

Esquema y organización del análisis

Las preguntas que han guiado el análisis se han centrado en: i) Contenidos relativos a los sólidos; ii) ideas y procedimientos geométricos para determinar el volumen, la capacidad y el área; iii) la unidad de medida); iv) la propiedad aditiva y de conservación del área y del volumen; v) relaciones que implican diferentes objetos geométricos o diferentes magnitudes; vi) diferentes representaciones de los sólidos; vii) el uso del lenguaje geométrico; viii) el uso del lenguaje algebraico.

Para cada problemática nos cuestionamos sobre las ideas que se muestran, los procedimientos que se usan y las dificultades y errores que se presentan. Por ejemplo, algunas cuestiones en relación con ii) son: ¿Qué ideas muestran los alumnos sobre el concepto de volumen? ¿Qué procedimientos utilizan en actividades que implican recubrimientos? ¿Recubren con unidades? ¿Dibujan el recubrimiento o parte de él? ¿Qué errores y dificultades muestran? Para iii) se examina si se usan de manera correcta, si se acompañan o no al número que se indica como una medida, y para iv) nos preguntamos: ¿Cómo se percibe la transformación de un prisma recto en oblicuo (manteniendo la altura y la base de los mismos) en relación con el volumen y superficie de los prismas correspondientes? ¿Y cuándo se realiza en ellos la transformación de cortar y pegar? ¿Se pueden realizar estas transformaciones? ¿Se pueden dibujar estas transformaciones y las formas geométricas obtenidas? ¿Qué dificultades y/o errores se observan?

Relacionado con la resolución de problemas, siguiendo a Murillo y otros (2011) tenemos en cuenta si el alumno: R1) Convierte el enunciado real en un enunciado matemático. R2) Traduce el enunciado matemático en una forma geométrica. R3) Identifica, selecciona y aplica los conceptos relacionados construidos anteriormente. R4) Aplica y adopta estrategias necesarias para resolver el problema. R5) Se observa que el alumno reflexiona y controla el proceso de resolución. R6) Comunica acerca del modelo y sus resultados dando una solución justificada del problema.

Para las respuestas de cada actividad se hizo un análisis detallado como el que se muestra en el Anexo 1 para la actividad 7. Puede notarse que se hicieron observaciones relativas a tipos de respuesta, dificultades y errores y a aspectos sobre el proceso de resolución de problemas.

Actividades		**Llegan al resultado correcto**	**No llegan al resultado correcto**	**Blanco**
A1	a)	5	3	1
	b)	8	0	1
A4		3	2	1
A5	altura	3	2	1
	capacidad	3	1	2
A6	a)	2	2	2
	b)	2	2	2
A7	a)	2	3	1
	b)	4	1	1
	c)	3	2	1
A8		5	0	1
A9		5	0	1
A10		2	3	1

Cuadro 3: Número de grupos que han llegado o no al resultado al resolver las actividades.

Al conjugar los datos obtenidos a partir de las actividades del cuadro 2, se registraron en tablas las observaciones de cada tipo (véase los cuadros 3 y 4) y se organizaron como indicamos en el apartado siguiente.

Puede notarse que en el Cuadro 3 no se han incluido las actividades A2 y A3, por las características de la respuesta esperada. El Cuadro 4 no contempla las actividades A1 a A3 ya que no se incluyeron en la secuencia con el propósito de determinar los aspectos de resolución de problemas, nombrados como Ri, que hemos indicado en este apartado como que se iban a tener en cuenta en el análisis.

Actividades	R1	R2	R3	R4	R5	R6
A4	0	3	5	5	4	2
A5	0	3	5	5	3	2
A6	4	3	3	3	3	1
A7	3	2	4	3	2	3
A8	2	5	5	5	5	5
A9	2	5	5	5	5	5
A10	0	2	5	5	5	2

Cuadro 4: Número de grupos (sobre 6) que cumplen los aspectos R1 a R6 relativos a la resolución de problemas.

TIPOS DE RESPUESTA Y DIFICULTADES Y ERRORES

Tipos de respuesta

Los que se han determinado para cada actividad están en relación con los aspectos de la medición o de resolución de problemas que se pretendía reforzar con ellas. Dada la brevedad del informe sólo indicamos la distinción de tipos de respuesta para tres de las actividades desarrolladas. Para cada tipo, entre paréntesis indicamos el número de grupos que la han reflejado en relación con el nº total de grupos que ha llegado a la solución. El nº total de grupos que participó en la resolución de A1 fue 9 mientras que en las restantes sólo se formaron 6 grupos.

Para la A1, siguiendo a San Miguel y Salinas (2011), las distinguimos según el reflejo de la concepción del volumen como: Magnitud trilineal (producto de dimensiones lineales) (2/6); magnitud bilineal con el uso de un proceso multiplicativo (se calcula el área de una base y se multiplica por la altura) (2/6); magnitud bilineal con el uso de un proceso aritmético (se halla el nº de cubitos de una capa y se suman los cubitos que hay en todas las capas) (0/6) y magnitud lineal (se cuentan los cubitos que hay en total) (2/6). Además, hemos contemplado también, por un lado, si reflejan (o no) que se percibe (o no) la conservación del volumen, la tridimensionalidad, la relación entre volúmenes del cubo y el ortoedro y/o de diferentes prismas, y, por otro, el uso que se hace de los diferentes procedimientos geométricos que se han utilizado al recubrir con unidades cúbicas para el cálculo de volúmenes y que llevan a ideas diferentes del mismo.

La A6 está dirigida a reforzar la relación entre volumen y capacidad, la conservación del volumen (al usar métodos de composición y descomposición) y diferentes procedimientos para el cálculo del volumen. Se distinguen 2 tipos de respuestas: los que reflejan de manera explícita que se determina el volumen del sólido por procedimientos geométricos (3/4), o se determina éste mediante cálculos (1/4). Entre los primeros distinguimos los que lo han realizado por descomposición y composición (1/4) o por composición y descomposición (el cuerpo geométrico se completa para formar un prisma, se calcula el volumen del prisma completo y se le resta el volumen de la parte añadida) (2/4).

En el Anexo 1 incluimos los tipos de respuesta delimitados para la A7 y el nº de grupos en los que se ha reflejado.

Dificultades y errores

El listado de los errores que determinamos para cada actividad, al considerarlos en su conjunto los organizamos según el aspecto geométrico, de medición o de resolución de problemas al que corresponden.

1) Al calcular la superficie de la pirámide, cuando ésta no se representa en el plano, no se identifica la apotema del cuadrado ni la altura de la cara lateral (G3-A7). Asimismo, con la representación en el plano en los cálculos se considera el cuadrado de la base en vez del triángulo de la cara lateral y se toma la altura de la pirámide en vez de la altura de la cara lateral (G4 y G5-A7).
2) Se interpreta y usa inadecuadamente el significado de "la superficie que ocupa". Se considera la superficie que ocupa como la superficie del sólido correspondiente (G1, G2, G5-A7).
3) No se han usado las unidades cúbicas del volumen (G1- A1). No se simbolizan correctamente las unidades de longitud, superficie y/o volumen (G5 y G6-A2, A3). Se iguala una fórmula y las unidades, sin indicar el número que indica la medida (G3-A3).
4) No se considera la altura o la profundidad para hallar el volumen del prisma. Se hallan los cubitos que rellenan la primera capa y ya no se sigue rellenando ni considerando la altura como que refleja el número de capas. (G1, G5 y G6- A1).
5) Se considera que los prismas que tienen igual volumen tienen también igual superficie (G1-A3). Al calcular el área de la superficie de un sólido se entrelazan las fórmulas del área y el volumen (G5-A10).
6) Se calcula la capacidad con la fórmula del volumen sin tener en cuenta el cambio de unidades (G2-A6).
7) El dibujo de un paralelepípedo se identifica como el de un cubo (G5 y G6-A2). Se traduce el enunciado matemático en una forma geométrica incorrecta. Se dibuja el desarrollo plano del paralelepípedo oblicuo como el desarrollo de un paralelepípedo recto (G7-A2). No se utilizan las representaciones planas y se tienen dificultades para determinar algunas dimensiones (G3-A7). Se tienen dificultades para realizar y usar representaciones de los sólidos y para transformar el problema en un problema matemático (G1,G2,G3,G4,G5-A4, A5 y A.10; G1,G2 y G5-A7, G2,G3 y G5-A8).
8) No se reflexiona sobre el significado de los datos (G2-A6; G1, G2 y G5-A7). Se halla el volumen del paralelepípedo como producto de los tres datos del problema. Se identifican las dimensiones que se muestran visualmente (con la base descompuesta en cuadritos) y para la altura se toma el volumen del cubo (G1-A1).
9) Se selecciona la fórmula del volumen del cubo para la justificación de volumen de un paralelepípedo (G5 y G6-A2).
10) Se aplican y adoptan cálculos no necesarias para resolver el problema (G3-A7). Se omite el cálculo de elementos necesarios para la resolución del problema (G1, G2, G3, G4 y G5-A10).
11) Se interpreta y usa la fórmula del volumen de un sólido de manera incorrecta para la obtención del resultado. (G2-A6). Se sustituyen los datos del problema de manera inadecuada en el proceso de resolución (G4-E10).
12) Se usa la fórmula pero no se es capaz de expresar verbalmente lo que relaciona (G7-A3).
13) Se usa la terminología del plano para las figuras geométricas del espacio (G1-A1, G2-A4).
14) No se identifica correctamente la operación aritmética. Al escribir la fórmula en vez de un producto se usa una adición (G5 y G6-A3). No se manipula correctamente con las operaciones aritméticas (G3- A1, G2-A4, G2-A5, G1-A10). No se hacen correctamente los cálculos aritméticos. (G3-A6).
15) Al restar dos monomios, se le baja un grado al monomio resultante (G2-A4). No se despeja una variable en una ecuación (G1-A5).

Cuadro 5: Ejemplos de errores y/o dificultades.

Hemos distinguido los referidos a: 1) la identificación de sólidos y sus elementos; 2) ideas de conceptos; 3) el uso de la unidad de medida; 4) el cambio de dimensión en el objeto geométrico; 5) relaciones entre superficie y volumen y entre volúmenes de diferentes prismas; 6) relaciones entre volumen y capacidad; 7) el paso del enunciado del problema en un enunciado matemático- las representaciones planas de los sólidos; 8) la reflexión sobre las propiedades de los datos; 9) la selección de las fórmulas en la resolución de problemas; 10) los procedimientos para resolver los problemas; 11) el control del alumno del proceso de resolución; 12) la manera de comunicar el proceso de resolución y sus resultados; 13) el uso del lenguaje geométrico; 14) las expresiones aritméticas; 15) las expresiones algebraicas.

El Cuadro 5 muestra algunos ejemplos clarificadores de cada tipo, con la misma numeración que el tipo de error al que corresponden, y entre paréntesis indicamos el grupo/s que ha reflejado el error o dificultad (Gi) y la actividad en cuya respuesta se ha mostrado (Ai).

CONCLUSIONES. SUGERENCIAS PARA LA INSTRUCCIÓN

Como conclusiones del estudio cabe destacar las siguientes que corroboran resultados obtenidos en otros trabajos.

1) Con los objetos mentales que los estudiantes constituyen para el volumen de los sólidos se tiene dificultad para diferenciar o relacionar el volumen con otras magnitudes. Las actividades que implican relaciones entre el volumen con el área (A7) o la capacidad (A6 y A10) son las que han presentado más dificultades (véase el cuadro 3). En la enseñanza previa, en repetidas ocasiones se hizo sentir la necesidad de prestar más atención al estudio de los sólidos y sus elementos, a su descripción y clasificación. Los datos obtenidos reflejan que esta atención no fue suficiente. Asimismo, sugerimos trabajar con objetos que sean medibles respecto del volumen y otros que sean medibles respecto de la capacidad (Sáiz, 2007), siendo el experimento de inmersión el más recomendado (González et al. 2001). En Del Olmo et al. (1989, pp. 99-101) se muestran una gran variedad de situaciones para ello.

2) Se han reflejado dificultades para recubrir mentalmente cajas con unidades cúbicas que no correspondan al cubo unidad. El cuadro 3 muestra que hay grupos que no han llegado al resultado de la actividad A1a). Realizar tareas de recubrimiento con unidades no estándar puede favorecer que la medición no se realice sólo mediante algoritmos y que se precise la manera de expresar la medida de áreas y volúmenes de sólidos con las unidades adecuadas.

3) Se ha mostrado habilidad para relacionar volúmenes de diferentes cuerpos geométricos (Véase las filas A4, A8 y A9 del Cuadro 3). No obstante, al igual que en Dickson et al. (1984), hemos comprobado una tendencia a usar fórmulas memorísticamente y que ello haya conllevado una dificultad en la resolución de problemas (véase las filas de A6, A7a y A10 del Cuadro 3). La justificación de las fórmulas a partir de métodos de descomposición, puzzles u otros procedimientos utilizados en la enseñanza previa no fue suficiente para que los diferentes grupos superaran las dificultades que se tenían para establecer relaciones entre sólidos al determinar el volumen de éstos (véase A2, A6 y A10). Consideramos que en la enseñanza previa no se dedicó suficiente tiempo a este tipo de actividades ya que aún con estudiantes de la ESO no se pueden obviar.

4) Se ha reflejado una creencia muy generalizada de que la función de la resolución de un problema sea obtener el resultado. Como se apunta en Puig (1996), se refleja la no traducción del enunciado real al enunciado matemático, la no identificación explícita de los datos del problema, y el uso de operaciones y algoritmos sin tener un orden y sin especificar la dirección. El cuadro 4 refleja una cierta mejora en los grupos en relación con R3 a R6 a medida que se han ido resolviendo los problemas. Ahora bien, en lo que concierne a R1 (la traducción del problema real al matemático) esta mejoría no se ve tan clara. Insistimos en la conveniencia de trabajar estos elementos de la resolución de problemas, necesarios para mejorar los procesos de resolución y evitar la aplicación de algoritmos sin comprensión.

5) Se ha observado dificultad para usar el lenguaje geométrico y el lenguaje algebraico. Posiblemente se encuentre la explicación en la poca enseñanza previa en la geometría de los sólidos y en la introducción temprana del lenguaje algebraico.

6) Finalizamos el trabajo haciendo referencia a la secuencia que propone Freudenthal (1983, pp. 392-396) para la constitución del objeto mental volumen. Aún con estudiantes de la ESO queremos subrayar la necesidad de, desde situaciones cotidianas, realizar un estudio integral de la cualidad y de su medida que permita aislarla, comparar objetos respecto de ella, plantear la necesidad de la unidad de medida, conocer y utilizar diferentes unidades, estimar la medida del volumen de un objeto y además aplicar todos estos conocimientos a nuevas situaciones de la vida cuotidiana.

Referencias

Butts, T. (1980). Posing problems properly. En S. Krulik & R. E. Reys (Eds.), *Problem Solving in School Mathematics* (pp. 23 – 33). Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

Del Olmo, M.A., Moreno, M.F., & Gil. F (1993). *Superficie y volumen, ¿algo más que el trabajo con fórmulas?* Madrid: Síntesis.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Holanda: Reidel Pub.

González- López, M., & Flores, P. (2001). Conocimiento profesional del profesor de secundaria sobre las matemáticas: El caso del volumen. *Educación Matemática*, *13*(1), 35-54.

Gil, F., y Rico, L. (2003). Concepciones y creencias del profesorado de secundaria sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, *21*(1), 27-47.

Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación? En M. Moreno; A. Estrada; J.Carrillo, J. & T.Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 21- 68). Lleida: SEIEM.

Guillén, G., & Siñeriz, L. (2012). El caso de la circunferencia tangente a otras dos. Análisis de la actuación de una profesora de Magisterio. En A. Estepa; A. Contreras; J. Deulofeu; M. Penalva, M; F. García & L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 331-340). Jaén: SEIEM.

Polya, G. (1957). *How to solve it*. (2). Princeton, NJ: Princeton University Press. [Trad. castellana: Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas, 1965].

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares. Col. Mathema.

Puig, L. & Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Sáiz, M. (2007). *El volumen, ¿por dónde empezar?* Recuperado de http://www.matedu.cinvestav.mx .

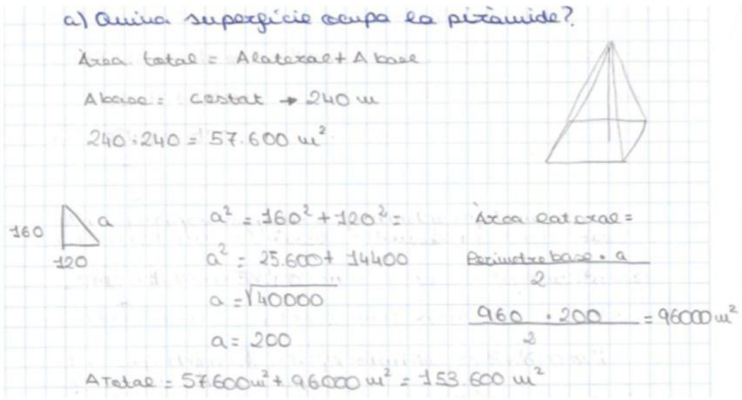
San Miguel, M., & Salinas, M.J. (2011). Dificultades del razonamiento del alumnado de 2o, ESO relacionadas con el concepto de volumen y su medida. En M. Marín.; G. Fernández; L. Blanco & M. Palarea (Eds.), Investigación en Educación Matemática XV (pp. 543-555). Ciudad Real: SEIEM.

Sanchis, S. (2012*). L' ensenyança / aprenentatge de l'àrea y el volum*. Memoria del Proyecto fin de Máster de Profesor/a de Secundaria, especialidad de matemáticas. Universitat de València. Valencia.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, FL: Academic Press.

ANEXO 1: COMENTARIOS REFERIDOS A LA ACTIVIDAD A7

Grupos 1, 2 y 5: La superficie que ocupa se calcula como la de la pirámide. Ejemplo:



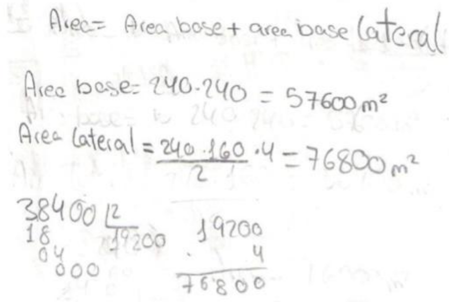
Respuesta a A7. Grupo 1

También se tienen dificultades para identificar los elementos que corresponden a los datos y/o que intervienen en las fórmulas que usan. En el ejemplo se observa que el Grupo 1, al calcular el área de cada cara lateral de la pirámide (CL) usan la fórmula del área de un polígono regular, aunque no lo es. Calculan el perímetro de la base en lugar del de la CL y toman como apotema el valor hallado que no corresponde a ella.

Grupo 3: Al calcular el área de la pirámide no se representa gráficamente la figura; no se ha calculado la apotema del cuadrado ni la altura de la cara lateral.

Grupo 4: En el cálculo del área se toma la altura de la pirámide en lugar de la apotema de la CL.

Grupos 5: Se usa la altura de la pirámide como la altura de la cara lateral.



Respuesta a A7. Grupo 5

Tipos de respuestas:

Para a) se distinguen respuestas en las que la hora de escribir las fórmulas parten de la fórmula del área del cuadrado (1 grupo de los 2 grupos que han resuelto el problema: 1/2) o de la del paralelogramo y/o rectángulo. En este caso, se indica "Base cuadrangular. Los lados son iguales. A= Base x altura" y luego sustituyen los datos (1/2).

Para b) distinguimos los que usan el desarrollo en el plano y calculan el área a partir de la suma de las áreas de la base y de las caras laterales (2/ 3), y los que al faltar la altura de la cara lateral consiguen el resultado mediante otras fuentes (1/ 3).

Para c) distinguimos entre los que usan la fórmula (4/5) y los que calculan el volumen de la pirámide a partir del del prisma con la misma base y altura (1/5).

Relativo a resolución de problemas:

Nº grupos	R1		R2		R3		R4		R5		R6	
	a)	b)	a)	b)	a)	b)	a)	b)	a)	b)	a)	b)
6	2	3	2	2	3	4	3	3	1	3	3	2

Tabla A7.1: Número de grupos que cumplen los aspectos R1 a R6 relativos a la resolución de problemas.

[xli] Utilizamos el término de *objeto mental* con el significado de Freudenthal (1983).

[xlii] Usamos la distinción entre superficie de un sólido y el área de la misma que indica su medida.

[xliii] Como hemos apuntado en trabajos previos, compartimos con Gil y Rico (2003) la idea de que los errores de los estudiantes pueden servir tanto para diagnosticar el conocimiento y corrección de deficiencias como para valorar y reconsiderar la planificación o programación; y también como factor o condición para el aprendizaje. De ahí que hemos considerado como una de las temáticas de nuestro estudio la referente a dificultades y errores.